



Zadania na XIV Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejona

Poziom II

(klasy drugie liceum i trzecie technikum)

Etap rejonowy

15 marca 2014 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Wyznacz wszystkie funkcje liniowe $f(x) = ax + b$, spełniające warunki $f(a) = 2014^{14}b$ oraz $f(b) = 2014^{14}a$.
2. Wyznacz wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2 - 12x + 16}}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$ o współrzędnych całkowitych.
3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a, b, c zachodzi nierówność: $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab} \leq a^2 + b^2 + c^2$.
4. Dany jest trójkąt ABC. Wyznacz miarę kąta ACB, jeżeli ortocentrum (tzn. punkt przecięcia wysokości) tego trójkąta należy do okręgu opisanego na trójkącie AOB, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.
5. Udowodnij, że jeżeli liczby 6 i liczba naturalna n są względnie pierwsze (tzn. ich największy wspólny dzielnik wynosi 1), to liczba $n^4 - 5n^2 + 4$ jest podzielna przez 72.

Powodzenia!